En remarquant que $y = \sqrt{(x(1-x)} \iff \begin{cases} y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$ ( ou par le graphe de $f$), on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \sqrt{(x(1-x)}dx = \text{ l'aire du demi-cercle centré en } (\frac{1}{2}, 0) \text{ et de rayon } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

2.31 Exercice Montrer que chacune des expressions mises en jeu ci-dessous peut s'interpréter comme une somme de Riemann. Identifier chaque fois la fonction qui permet une telle interprétation. Calculer alors les limites dont il est question.

1) $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$,

2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$,

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$,

4) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k^2}{n^2})^{\frac{1}{n}}$

## 2.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ (qui sont énoncées en Proposition 1.13) se généralisent aux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, en particulier $\mathcal{R}([a, b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $I : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}$ définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire compatible avec l'ordre partiel sur les fonctions.

2.32 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Alors :

(i) $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b (f+g)(x)dt = \int_a^b f(x)dt + \int_a^b g(x)dx$.

(ii) Pour tout réel $\lambda$, $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$.

(iii) Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

(iv) Si $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(v) **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in ]a, b[$, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ci-dessus, la quantité $\int_a^c f(x)dx$(resp. $\int_c^b f(x)dx$) désigne l'intégrale de la restriction de $f$ au segment $[a, c]$ (resp. $[c, b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{R}([a, b])$.

*Démonstration:* (i) Il existe des suites $(u_n)$, $(v_n)$, $(\tilde{u}_n)$, $(\tilde{v}_n)$ de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que : $u_n \leq f \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(x)dx = 0$.

$\tilde{u}_\epsilon \leq g \leq \tilde{v}_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\tilde{v}_n - \tilde{u}_n)(x)dx = 0$.

On en déduit que : $(u_n + \tilde{u}_n) \leq f + g \leq (v_n + \tilde{v}_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b [(v_n + \tilde{v}_n) - (u_n + \tilde{u}_n)](x)dt = 0$ d'après les propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}([a,\ b])$. Par suite, $f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$ et des inégalités :

$$\int_a^b u_n(x)dx \ \leq\ \int_a^b f(x)dx \ \leq\ \int_a^b v_n(x)dx$$

$$\int_a^b \tilde{u}_n(x)dx \ \leq\ \int_a^b g(x)dx \ \leq\ \int_a^b \tilde{v}_n(x)dx$$

on obtient que :

$$\int_a^b (u_n + \tilde{u}_n)(x)dx \ \leq\ \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ \leq\ \int_a^b (v_n + \tilde{v}_n)(x)dx$$

et comme :

$$\int_a^b (u_n + \tilde{u}_n)(x)dx \ \leq\ \int_a^b (f+g)(x)dx \ \leq\ \int_a^b (v_n + \tilde{v}_n)(x)dx$$

on déduit que :

$$|\int_a^b (f+g)(x)dx - (\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx)| \ \leq\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [(v_n + \tilde{v}_n) - (u_n + \tilde{u}_n)](x)dx \ = 0$$

Par suite, $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(ii) Se démontre de manière analogue.

(iii) Soit $f \geq 0$. Si $u \in \mathcal{E}([a,\ b])$ vérifie $u \leq f$ alors la fonction $u_+$ définie par : $u_+(x) = \max(u(x),\ 0),\ x \in [a,\ b]$, est encore en escalier sur $[a,\ b]$ et vérifie $u+ \leq f = f_+$. Par suite, de la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on obtient que

$$0 \leq \int_a^b u_+(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx,$$

Compte-tenu de (i) et (ii), si $f \geq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0.$$

(iv) Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$ telles que $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a,\ b]$. En posant $h = f - g$, d'après (i) $h$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$ et nulle sauf en un nombre fini de points. On doit montrer que $\int_a^b h(x)dx = 0$. Or une telle fonction $h \in \mathcal{E}([a,\ b])$ et, d'après la relation de Chasles, il est immédiat que $\int_a^b h(x)dx = 0$.

(v) Soit $c \in ]a,\ b[$. Notons $f_1$ et $f_2$ les restrictions de $f$ aux segments $[a,\ c]$ et $[c,\ b]$. On va montrer que $f_1$ et $f_2$ sont Riemann-intégrables sur $[a,\ c]$ et $[c,\ b]$ respectivement. Par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions $u_\epsilon,\ v_\epsilon \in \mathcal{E}([a,\ b])$ telles que :

$$u_\epsilon \leq f \leq v_\epsilon \ et\ \int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leq \epsilon.$$

Notons $u_\epsilon^1,\ v_\epsilon^1$ et $u_\epsilon^2,\ v_\epsilon^2$ les restrictions de $u_\epsilon,\ v_\epsilon$ aux segments $[a,\ c]$ et $[c,\ b]$. On a donc : $u_\epsilon^1,\ v_\epsilon^1 \in \mathcal{E}([a,\ c])$ et $u_\epsilon^2,\ v_\epsilon^2 \in \mathcal{E}([c,\ b])$ et :

$u_\epsilon^1 \leq f_1 \leq v_\epsilon^1$ sur $[a,\ c]$ et $u_\epsilon^2 \leq f_2 \leq v_\epsilon^2$ sur $[c,\ b]$.
En outre :

$$\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx = \int_a^c (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx + \int_c^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx$$

$$= \int_a^c (v_\epsilon^1 - u_\epsilon^1)(x)dx + \int_c^b (v_\epsilon^2 - u_\epsilon^2)(x)dx.$$

On en déduit (puisque $\int_a^c (v_\epsilon^1 - u_\epsilon^1)(x)dx \geq 0$ et $\int_c^b (v_\epsilon^2 - u_\epsilon^2)(x)dx \geq 0$) que :

$$\int_a^c (v_\epsilon^1 - u_\epsilon^1)(x)dx \leq \epsilon \text{ et } \int_c^b (v_\epsilon^2 - u_\epsilon^2)(x)dx \leq \epsilon.$$

Par suite, $f_1$ et $f_2$ sont Riemann-Intégrables sur $[a,\ c]$, $[c,\ b]$ respectivement.
Et, des inégalités :

$$\int_a^c u_\epsilon^1(x)dx \ \leq \ \int_a^c f_1(x)dx \ \leq \ \int_a^c v_\epsilon^1(x)dx$$

$$\int_c^b u_\epsilon^2(x)dx \ \leq \ \int_c^b f_2(x)dx \ \leq \ \int_c^b v_\epsilon^2(x)dx$$

on déduit que :

$$\int_a^b u_\epsilon(x)dx \ \leq \ \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx \ \leq \ \int_a^b v_\epsilon(x)dx$$

et, conmme on a aussi :

$$\int_a^b u_\epsilon(x)dx \ \leq \ \int_a^b f(x)dx \ \leq \ \int_a^b v_\epsilon(x)dx$$

on obtient que :

$$|\int_a^b (f)(x)dx - (\int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx)| \ \leq \ \int_a^b v_\epsilon(x)dx - \int_a^b u_\epsilon(x)dx \ \leq \ \epsilon.$$

2.34 Exercice Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive. On pose* $m := \sup\{f(x); x \in [a,\ b]\}$. *Prouver que* :

$$\lim_{n\to\infty} (\int_a^b f(x)^n dx)^{\frac{1}{n}} = m.$$

2.35 Exercice Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une application strictement croissante telle que* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$. *Calculer* :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f(x)]^n dx.$$

2.36 Exercice Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\int_0^1 [f(x)]^n dt$ *ne prenne qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit* $\mathbb{N}$.

1) *Montrer que* $\int_0^1 [f(x)]^{2n} dt$ *ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit* $\mathbb{N}$.
2) On suppose qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $[f(x_0)]^2 > 1$. Trouver une contradiction.
3) On suppose que $f^2 : [0,1] \to [0,1]$ n'est pas la fonction nulle ou identiquement 1. En examinant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en posant $u_n = \int_0^1 f(x)^{2n} dt$, trouver une contradiction.

4) *Déduire de ce qui précède que* $f \equiv -1$ *ou* $f \equiv 0$ *ou bien* $f \equiv 1$.

En fait, le point (v) de la Proposition 2.32 admet une réciproque :

2.37 PROPOSITION
Soient $a < c < b$ trois nombres réels, et soit $f$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Alors, $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Démonstration:* Il suffit, d'après la proposition précédente, de montrer que $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Soit $\epsilon > 0$. Les restrictions $f_1$ et $f_2$ de $f$ à $[a, c]$ et $[c, b]$ étant Riemann-intégrables, il existe $u_\epsilon^1, v_\epsilon^1 \in \mathcal{E}([a, c])$, $u_\epsilon^2, v_\epsilon^2 \in \mathcal{E}([c, b])$ telles que :

$$u_\epsilon^1 \leq f_1 \leq v_\epsilon^1 \, , \int_a^c (v_\epsilon^1 - u_\epsilon^1)(x)dx \leq \epsilon$$

et

$$u_\epsilon^2 \leq f_2 \leq v_\epsilon^2 \int_c^b (v_\epsilon^2 - u_\epsilon^2)(x)dx \leq \epsilon.$$

Soient $u_\epsilon, v_\epsilon \in \mathcal{E}([a, b])$ définies par :

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} u_\epsilon^1 \text{ si } t \in [a, c] \\ u_\epsilon^2 \text{ si } t \in ]c, b] \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} v_\epsilon^1 \text{ si } t \in [a, c] \\ v_\epsilon^2 \text{ si } t \in ]c, b] \end{cases}$$

On a donc : $u_\epsilon \leq f \leq v_\epsilon$ sur $[a, b]$. De plus, grâce à la relation de Chasles on a :

$$\int_a^b u_\epsilon(x)dx = \int_a^c u_\epsilon^1(x)dx + \int_c^b u_\epsilon^2(x)dx$$

$$\int_a^b v_\epsilon(x)dx = \int_a^c v_\epsilon^1(x)dx + \int_c^b v_\epsilon^2(x)dx.$$

Par suite, $\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leq 2 \in$, ce qui prouve que $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. ∎

Afin d'étendre cette relation de Chasles au cas où les réels $a$, $b$ et $c$ sont dans un ordre quelconque, on conviendra de , pour $f$ Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$, $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ si $\alpha, \beta \in [a, b]$ avec $\alpha < \beta$ et $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ si $\alpha = \beta$.

Avec cette convention, il résulte des propositions 2.32 et 2.37 :

2.39 PROPOSITION
Relation de Chasles Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et $\alpha, \beta, \gamma$ trois points de $[a, b]$. Alors on a :

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx.$$

*Démonstration:* Traitons par exemple le cas $\alpha < \gamma < \beta$. D'après la proposition 1, les restrictions de $f$ aux segments $[\alpha, \gamma]$, $[\alpha, \beta]$ et $[\gamma, \beta]$ sont Riemann-intégrables et d'après la proposition 2 :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

i.e. :

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

et, d'après la convention adaptée :

$$= \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx..$$

. ■

Autres exemples de fonctions Riemann-intégrables : les fonctions continues par morceaux

2.41 Définition (Fonction continue par morceaux)
On dit qu'une fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a < \ x_1 < \ \ldots < \ x_n = b\}$ de $[a,\ b]$ telle que la restriction de $f$ aux intervalles $]x_i,\ x_{i+1}[$ soit continue et admette un prolongement par continuité sur $[x_i,\ x_{i+1}]$ (i.e. : que $f|]x_i,\ x_{i+1}[= f_i|]x_i,\ x_{i+1}[$ avec $f_i : [x_i,\ x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ continue, ce qui revient à dire que $f$ admet une limite à gauche en $x_i$ et une limite à droite en $x_{i+1}$, $i \in \{0,\ \ldots,\ (n-1)\}$

---

Il résulte alors de ce qui précède que :

2.42 Proposition
Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$ et, si $\sigma = \{x_0 = a < \ \ldots < \ x_n = b\}$ est une subdivision adaptée à $f$, $f_i : [x_i,\ x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ un prolongement continu de $f$ à $[x_i,\ x_{i+1}]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x)dx.$$

2.43 Exemple. Soit $f(x) = [x] : [0,3] \to \mathbb{R}$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel $t$. Alors $f$ est continue par morceaux sur $[0,3]$, et son intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ est égale à 3.

2.44 Exercice *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g_n(x)dx = f(0+).$$

2.45 Proposition (Propriéte de la moyenne.)
Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, et soient $m,\ M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [a,\ b]\ , m \le f(x) \le M.$$

Alors :

$$m(b-a)\ \le\ \int_a^b f(x)dx\ \le\ M(b-a).$$

*Démonstration:* Cela résulte immédiatement du point (iii) de la proposition 2.32 avec $g(x) = m$ et $h(x) = M,\ x \in [a,\ b]$. ■

2.47 Remarque
Si $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$, on sait que $f$ est alors bornée sur $[a,\ b]$ et on peut prendre

$$m = \inf_{x\in[a,\ b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,\ b]} f(x).$$

Dans le cas particulier où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut préciser davantage ce résultat :

2.48 PROPOSITION ( FORMULE DE LA MOYENNE)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

*Démonstration:* La fonction $f$ étant continue sur le segment $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Soient $m = \inf_{x\in[a, b]} f(x) = f(c_1)$ et $M = \sup_{t\in[a, b]} f(x) = f(c_2)$, $c_1$, $c_2 \in [a, b]$. Par suite, d'après la proposition précédente, le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ appartient au segment $[m, M] = [f(c_1), f(c_2)]$. Et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_1, c_2] \subset [a, b]$ tel que : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.

Il résulte aussi de cette même proposition2.32 que l'on a :

2.50 THÉORÈME
Soient $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$ et on a : $\max(\int_a^b f(x)dx\,, \int_a^b g(x)dx) \le \int_a^b \max(f(x), g(x))dt$

$\min(\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx) \ge \int_a^b \min(f(x), g(x))dt.$

---

*Démonstration:* Tout d'abord, il est facile de vérifier que si $\alpha$, $\beta$ sont deux nombres réels alors :

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} \textit{ et } \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}.$$

En particulier, on a :

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \frac{f-g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \max(f-g, 0)$$

et

$$\min(f, g) = -\max(-f, -g).$$

Il suffit donc de montrer que si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors $f_+ = \max(f, 0) \in \mathcal{R}([a, b])$.

Or si $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_\epsilon$, $v_\epsilon \in \mathcal{E}([a, b])$ telles que :

$$u_\epsilon \le f \le v_\epsilon \textit{ et } \int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \le \epsilon.$$

Les fonctions $u_\epsilon^+ = \max(u, 0)$ et $v_\epsilon^+ = \max(v_\epsilon, 0)$ sont encore en escaliers sur $[a, b]$ et vérifient :

$$u_\epsilon^+ \le f_+ \le v_\epsilon^+ \textit{ et } \int_a^b (v_\epsilon^+ - u_\epsilon^+)(x)dx \le \epsilon$$

car :

$$v_\epsilon^+ - u_\epsilon^+ = \frac{1}{2}(v_\epsilon - u_\epsilon) + \frac{1}{2}(|v_\epsilon| - |u_\epsilon|)$$

et

$$|v_\epsilon| - |u_\epsilon| \le ||v_\epsilon| - |u_\epsilon|| \le |v_\epsilon - u_\epsilon| = v_\epsilon - u_\epsilon$$

d'où : $v_\epsilon^+ - u_\epsilon^+ \le v_\epsilon - u_\epsilon$. Par suite, $f_+$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

2.52 REMARQUE
Il résulte des expressions $\max(f,\ g)$ et $\min(f,\ g)$ données dans cette démonstration que si $f$ et $g$ sont continues en un point $t_0 \in [a,\ b]$, il en est de même de $\max(f,\ g)$ et $\min(f,\ g)$.

2.53 COROLLAIRE
Si $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$, alors $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = \min(f,0)$ et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$ et, de plus :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dt.$$

---

*Démonstration:* Comme $|f| = f_+ - f_-$, il résulte du théorème précédent que si $f \in \mathcal{R}([a,\ b])$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a,\ b]$. Par ailleurs, puisque $-|f| \leq f \leq |f|$, on obtient que :

$$-\int_a^b |f|(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f|(x)dx$$

c'est-à-dire :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$

2.55 EXEMPLE (UN CONTRE-EXEMPLE). En général, $|f|, f_+$ ou $f_-$ riemann-intégrable n'entraîne pas que $f$ le soit. Par exemple si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0\ 1] \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0\ 1] \end{cases}$$

Alors $f$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$ ( car $f \equiv 2g - 1$ voir l'exemple 2.4), et cependant $|f| \equiv 1$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

*Autres exemples de fonctions Riemann-intégrables*

2.56 PROPOSITION
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que pour tout $c \in [a,b[$, $f \in \mathcal{R}([a,c])$.

Alors $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$

*Démonstration:* Soit $M$ un majorant de $|f|$ sur $[a,\ b]$ et soit $\epsilon > 0$. La fonction $f$ est intégrable sur $[a,\ b - \frac{\epsilon}{2M+1}]$, donc il existe deux fonctions en escalier $u_e$ et $v_\epsilon$, telles que, pour tout $x$ de $[a,\ b - \frac{\epsilon}{2M+1}]$

$$u_\epsilon(x) \leq f \leq v_\epsilon(x),$$

et

$$\int_a^{b-\frac{\epsilon}{2M+1}} (v_\epsilon - f_\epsilon)(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2M+1}.$$

$\Phi_\in(x) = \begin{cases} v_\epsilon(x) & \text{si } x \in [a,\ b - \frac{\epsilon}{2M+1}] \\ M & \text{si } x \in ]b - \frac{\epsilon}{2M+1},\ b] \end{cases}$

Posons

et $\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} u_\epsilon(x) & \text{si } x \in [a,\ b - \frac{\epsilon}{2M+1}] \\ -M & \text{si } x \in ]b - \frac{\epsilon}{2M+1},\ b] \end{cases}$

Pour tout $x$ de $[a,\ b]$, on a

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x),$$

et, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} I(\Phi_{\in} - \varphi_\epsilon) &= \int_a^{b-\frac{\epsilon}{2M+1}} (\Phi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx + \int_{b-\frac{\epsilon}{2M+1}}^b (\Phi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \\ &= \int_{b-\frac{\epsilon}{2M+1}}^b (\Phi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx + \ 2M\frac{\epsilon}{2M+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$I(\Phi_\epsilon - \varphi_\epsilon) \leq 2M\frac{\epsilon}{2M+1} + \frac{\epsilon}{2M+1} = \epsilon.$$

Il en résulte que $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$. Alors, si $b - \frac{\epsilon}{2M+1} < c < b$,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_c^b f(x)dx\right| \leq \int_a^c |f(x)|dx,$$

donc

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx| \leq M(b-c)\ \leq M\frac{\epsilon}{2M+1} < \in .$$

Il en résulte que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

2.58 REMARQUE
On peut écrire un résultat analogue en inversant les rôles des bornes $a$ et $b$.

On appliquant la proposition dans chaque intervalle dont les extrémités sont des points de discontinuité on obtient :

2.59 COROLLAIRE
Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée et qui a au plus un nombre fini de points de discontinuité est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

---

2.60 EXEMPLE. La fonction fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in ]0,1] \\ 10 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, puisqu'elle est continue sur t$]0,1]$, donc Riemann-intégrable sur $[c,\ 1]$ pour tout $c > 0$, et qu'elle est bornée.

### 2.2.1 Produit de fonctions Riemann-intégrables

2.61 PROPOSITION
Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$, leur produit est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
En particulier, si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ alors pour tou $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{R}([a,b])$.

*Démonstration:* Montrons tout d'abord le résultat pour des fonctions $f$ et $g$ Riemann-intégrables et positives. Les fonctions $f$ et $g$ sont bornées et positives : il existe donc deux constantes $M$ et $M'$ telles que $0 \leq f \leq M$ et $0 \leq g \leq M'$.
Il existe alors quatre suites de fonctions en escaliers $(u_n)$, $(v_n)$, $(\phi_n)$, $(\psi_n)$ telles que, pour tout entier $n$

$0 \leq u_n \leq f \leq v_n \leq M$ et $0 \leq \phi_n \leq g \leq \psi_n \leq M'$, avec

$$\lim_{n \to +\infty} I(v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} I(\psi_n - \phi_n) = 0.$$

Donc

$$u_n \phi_n \leq fg \ \leq v_n \psi_n,$$

et les fonctions $u_n \phi_n$ et $v_n \psi_n$ sont en escalier.

On a alors

$$0 \leq v_n \psi_n - v_n \phi_n = v_n(\psi_n - \phi_n) + \phi_n(v_n - u_n) \leq M(\psi_n - \phi_n) + M'(v_n - u_n),$$

et en utilisant la croissance et la linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$0 \leq \int_a^b (v_n \psi_n - u_n \phi_n)(x) dx \leq M \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x) dx + M' \int_a^b (v_n - u_n)(x) dx.$$

Le théorème "des gendarmes" montre que la suite $\int_a^b (v_n \psi_n - u_n \phi_n)(x) dx$ converge vers 0, donc que $fg$ est Riemann-intégrable.

Si maintenant $f$ et $g$ sont Riemann-intégrables de signes quelconques, les fonctions $f+$, $-f_-$, $g_+$, $-g_-$ sont Riemann-intégrables et positives, donc leurs produits aussi. Mais

$f = f_+ + f_-$ et $g = g_+ + g_-$,

donc

$$fg \ = f_+ g_+ + f_+ g_- + f_- g_+ + f_- g_-,$$

est Riemann-intégrable comme somme de fonctions Riemann-intégrables. ■